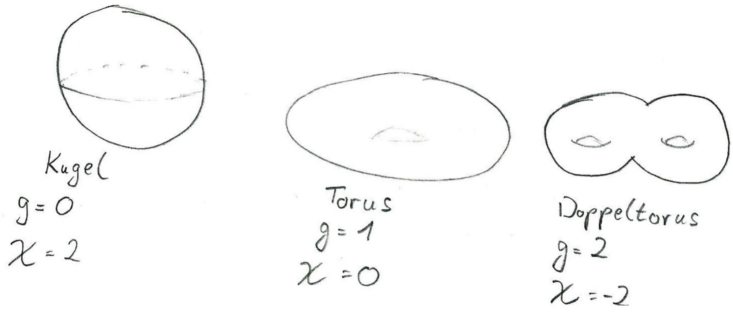
Geschlecht einer glatten Kurve

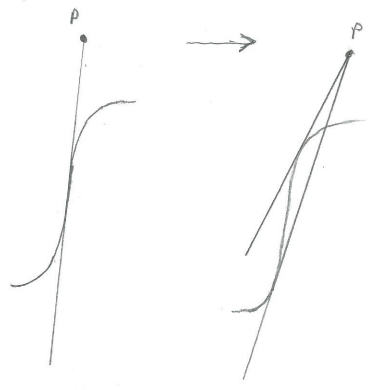


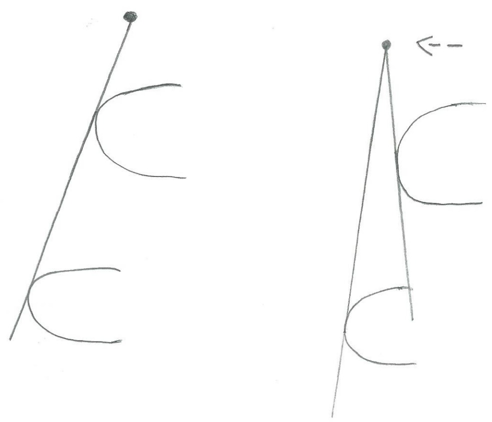
Satz:

$C \subset \mathbb{P}^2$ glatte Kurve von Grad $d \Rightarrow g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Definition: C glatte Kurve $\subset \mathbb{P}^2$. Ein Punkt $p \in \mathbb{P}^2$ heißt allgemein ("generisch"), wenn durch $\mathbb{P}$ genau $d(d-1)$ verschiedene Tangenten an C gezogen werden können.
Erinnere: $\nabla_p C$ polare von C bez. $\mathbb{P}$
$p^{'} \in C \cap \nabla_p C \Leftrightarrow T_{p'} \ni \mathbb{P}$

Bemerkung:
1) Wir werden später sehen, dass "die meisten" Punkte allgemein bez. C sind
2) Wir werden Begriffe später für singuläre Kurven brauchen
3) P allgemein bedeutet, gewisse Unfälle passieren nicht



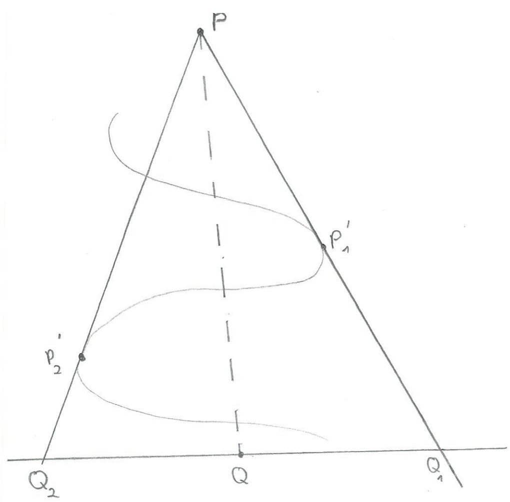


Zu Beispiel 1 :
$I(C, T_pC, p^{'}) = 3$ und $I(\nabla_pC, p^{'}) = 2$
Zu Beispiel 2 erkennt man, dass durch Verschiebung 2 Tangenten entstehen.

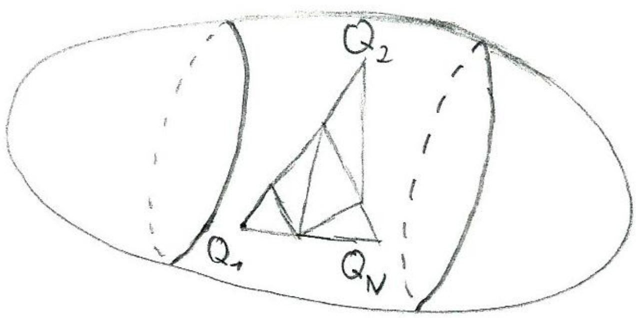
Beweis von Satz von Riemann-Clebsch

Nehme einen Punkt $p \in \mathbb{P}^2$ allgemein bez C

$\pi : \mathbb{P}^2 \setminus P \longrightarrow C \qquad p \notin C \subset \mathbb{P}^2$ Gerade
$P^{'} \longrightarrow \mathbb{Q} =\mid \mathbb{P}\mathbb{P}^{'} \mid \cap C$
$\exists\, \mathbb{P}^{'}_1, \ldots, \mathbb{P}^{'}_N \quad N = d(d-1)$
$\mid PP^{'}_i \mid = T_{\mathbb{P}^{'}_i}C$
$Q_i = \pi(\mathbb{P}^{'}_i) \in C \approx \mathbb{P}^1 \approx S^2$
Wir haben $\pi^{-1}(Q)$ besteht aus genau $d = Grad(C)$ verschiedenen Punkten, wenn $Q \notin \{Q_1, \ldots, Q_N\}$



$\pi^{-1}(Q)$ besteht aus $d-1$ verschiedenen Punkten.
Wir nehmen die Triangulierung von $S^2 \approx C$, welche die Punkte Q_i $i=1,\ldots,N$ als Eckpunkte hat.



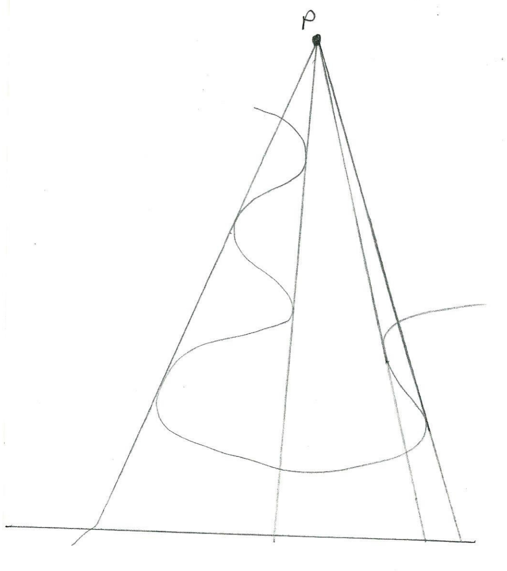
$E =$ Menge der Eckpunkte, $\{Q_1,\ldots,Q_N\} \in E$
$K =$ Anzahl Kanten $\quad F =$ Anzahl Flächenstücke

$E - K + F = 2$

Nehme Urbilder der Dreiecke aus $F \longrightarrow$ Triangulierung von $C, E^{'}, K^{'}, F^{'}$

$E^{'} = dE - N$
$K^{'} = dK$
Also $X(C) = E^{'} - K^{'} + F^{'} = dE - N - dK - DF$
$= d(E - K + F) - N = dX(P^1) - N = 2d - N$
$2 - 2g(C) = 2d - d(d-1) = 3d - d^2$
$2g(C) = d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2)$

Bemerkung: 1) Im Beweis haben wir $\mathbb{P}$ allgemein bez. C vorausgesetzt Beweis funktioniert auch wenn $\mathbb{P}$ nicht allgemein bez. C ist, aber ist etwas komplizierter.
$I(C, T_p; C_i p^{'}) = I(C, \nabla_p C; p^{'}) + 1$
Finde noch immer $E^{'} = dE - N$ weil $N = \sum_{p'} I(C, \nabla_p C; p^{'})$



2) Diese topologische Invariante C bestimmt auch die Struktur von $\mathcal{C}\updownarrow(C)$
Es ist $\mathcal{C}\updownarrow(C) \approx \mathbb{C}^g/\Lambda \quad \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g} = (S^1)^{2g} \quad \Lambda \approx \mathbb{Z}^{2g}$

Wie viele Elemente der Ordnung N gibt es ?
Antwort: N^{2g}
Alternative Definition von g über die Geometrie

$0 \in C$ kubik : g Wendepunkt $\Leftrightarrow P \oplus P \oplus P = 0$ (Element der Ordnung 3)

$g = 3^2 \quad \rightarrow \quad g = 1$
$Grad(C) = 4 \Rightarrow 64$ Elemente der Ordnung 2 in $\mathcal{C}l(C)$

Nachtrag zur Klassifikation von Kubiken

Gruppe PGL_2 operiert auf $\mathbb{P}^1 = C \cup \{\infty\}$
durch gebrochene lineare Transformationen
$\phi : x \longmapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$
Inhomogene Schreibweise
$(x : y) \longmapsto (\alpha x + \beta y; \gamma x + \delta y)$
induziert von linearen Transformationen auf $\mathbb{C}^2$
Bemerke es gilt genau eine Transformation welche

$0 \longmapsto 0 \quad \infty \longmapsto \infty$
$\Rightarrow \phi = Id$

Definition
$a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$ vier verschiedene Punkte auf $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Das Doppelverhältinis von (a, b, c, d) ist $(a, b, c, d) = fracc - ab - c : \frac{d-a}{b-d} \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$
Proposition $\exists! \ \psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit $\psi(a) = \infty, \psi(b) = 0, \psi(c) = 1$
Das Bild von d unter ψ ist dann $\psi(d) = (a, b; c, d)$

Beweis: Definiere $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ durch "$\psi(x) = (a, b; c, x)$"
Wir setzen also : $\psi(x) = \frac{c-a}{b-c}\frac{b-x}{x-a} \in PGL_2$
$\psi(a) = \infty \quad \psi(b) = 0 \quad \psi(c) = 1 \quad \psi(d) = (a, b; c, d)$
(Sei ψ' eine weitere Abb.$\psi'(a) = \infty, \psi'(b) = 0, \psi'(c) = 1$,
dann $\psi' \circ \psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit $\infty \longmapsto \infty, 0 \longmapsto 0, 1 \longmapsto 1$
also $(\psi')^{-1} \circ \psi = Id$ und $\psi = \psi'$

Propostition: $a, b, c, d; a', b', c', d'$ Quadrupeles von Punkte in $\mathbb{P}^1$
$\exists \psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \psi(a) = a', \psi(b) = b' \psi(c) = c' \psi(d) = d' \Leftrightarrow (a, b; c, d) = (a', b'; c', d')$

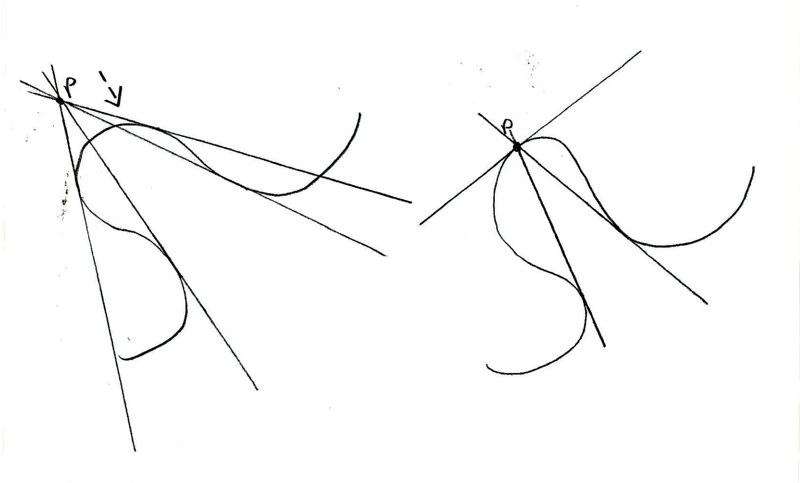
Beweis: $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1 \overset{\phi}{\Rightarrow} \mathbb{P}^1 \ni a', b', c', d'$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1 \overset{\psi}{\Rightarrow} \mathbb{P}^1 \overset{\psi'}{\Leftarrow} \mathbb{P}^1 \ni a', b', c', d'$
mit $(\infty, 0, 1, \lambda) \in \psi$ und $\lambda = (a, b, c, d)$ und mit $(\infty, 0, 1, \lambda') \in \psi'$ und $\lambda' = (a', b', c', d')$

Bemerke: Ist $(a, b, c, d) = \lambda$, so ist $(b, a, c, d) = \frac{1}{\lambda}$ und $(c, b, a, d) = 1 - \lambda$
$\lambda \longmapsto \frac{1}{\lambda}, \lambda \longmapsto 1 - \lambda$ erzeugen eine Gruppe σ_3 mit 6 Elementen $1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda}$

$j(\lambda) = 256\frac{(j^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \quad j(\lambda) = j(\frac{1}{\lambda}) = j(1 - \lambda)$
$j(\lambda) =$ konstante $\to$ 6 Lösungen für λ

Satz: $\exists \psi : \mathbb{P}^1 \longmapsto \mathbb{P}^1$ mit $\psi(\{a, b, c, d\}) = \{a', b', c', d'\} \Leftrightarrow j(a, b, c, d) = j(a', b', c', d')$

Kehren wir nun zu unserem vorherigen Thema zurück



$P \longmapsto p^{'} \in C$
zwei der Tangenten an C durch P werden zur Tangente $T_{p'}C \;\; p \in C$ Kubik
$\rightarrow$ es gibt 4 Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 durch P mit $l_i \neq T_p l$ welche Tangente von C sind.
$l_i = T_{p_i}C$ mit 4 Punkten in $T_p\mathbb{P}^2$

Satz von Ponce:

j-Invariante von l_1, l_2, l_3, l_4 ist unabhängig von $p \in C$
DIes ist per Definition j-Invariante von C